Résolution de problèmes au cycle 2

Parcours de formation en mathématiques cycle 2

6ème circonscription de Colombes 1

Le 20 novembre 2019

Karine GROMAIRE (PEMF) et Céline CERF (CPC)

Plan du parcours de formation

Ce parcours de formation se déroulera en 3 temps :

TEMPS 1

Le mercredi 20 novembre 2019 (2h30)

- **9h30 à 12h00 :** les écoles L. BOURGEOIS B, M. PAGNOL, BUFFON, C. PEGUY A, C. PEGUY B, H. MARTIN
- **13h00 à 15h30 :** les écoles L. CARNOT, L. BOURGEOIS A, M. BERTHELOT A, M. BERTHELOT B, LA TOUR D'AUVERGNE, S. VEIL, G. POMPIDOU

TEMPS 2

- Mise en œuvre dans la classe et travail d'équipe *(4 heures)*

TEMPS 3

Le mercredi 15 janvier 2020 (2h30)

- **9h30 à 12h00 :** les écoles : L. CARNOT, L. BOURGEOIS A, M. BERTHELOT A, M. BERTHELOT B, LA TOUR D'AUVERGNE, S. VEIL, G. POMPIDOU
- **13h00 à 15h30 :** les écoles L. BOURGEOIS B, M. PAGNOL, BUFFON, C. PEGUY A, C. PEGUY B, H. MARTIN

Les objectifs du présentiel 1

- Prendre conscience des enjeux de l'enseignement de la résolution de problèmes

- Identifier les obstacles didactiques majeurs et ajuster sa démarche d'enseignement

Les enjeux de cet enseignement :

Résultats des évaluations

Évaluations de fin de CE1 DEPP - 2011

A. Xavier a une collection d'images d'animaux et de fleurs. Au total, il en a 225.
Le nombre d'images d'animaux est 112.
Combien a-t-il d'images de fleurs ?

Recherches / Calculs :	*Réponse :*

50,25 % des élèves ne trouvent pas 113

Évaluations de fin de CE1 DEPP - 2012

L'album photo de Rémi et Chloé peut contenir 100 photos. Rémi veut ranger 24 photos et Chloé 16. Combien de places restera-t-il pour de nouvelles photos ?

☺ *Écris tes calculs dans le premier cadre et ta réponse dans le deuxième cadre.*

Recherches / Calculs	*Réponse*
	....

65 % des élèves ne trouvent pas 60

D’autres résultats

Élèves de CP

- Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il d’oiseaux de plus que de vers ?

25 % de réussite

- Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d’oiseaux n’auront pas de vers ?

96 % de réussite

Les enjeux de cet enseignement :

Les programmes

Repères annuels de progression

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Résolution de problèmes		
On introduit explicitement le sens des opérations et des symboles =, +, -, x et :		
Dès **le début de l'année**, les élèves commencent à résoudre des problèmes additifs. À partir de la **période 3**, les élèves résolvent aussi quelques problèmes multiplicatifs portant sur de petits nombres et dont la résolution s'appuie sur une itération d'additions, sans aucune difficulté calculatoire mais invitant à construire en situation le sens de la multiplication. En parallèle, dans la continuité du travail sur le sens effectué en maternelle, des problèmes de division sont initiés dans des situations très simples de partage ou de groupement.	Dès le **début de l'année**, les élèves consolident leur capacité à résoudre des problèmes additifs à une ou deux étapes. À partir de la **période 3**, ils rencontrent de nouveaux problèmes multiplicatifs qu'ils peuvent résoudre en utilisant leurs connaissances des premières tables de multiplication (exemple de la tablette de chocolat : combien y a-t-il de carreaux dans une tablette de 3 carreaux par 6 ?). En **période 4**, l'étude du sens de la division est préparée par la résolution de deux types de problèmes : ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur et ceux où l'on partage équitablement une grandeur en un nombre donné de grandeurs. En parallèle, les élèves résolvent des problèmes à deux étapes mixant addition et soustraction, ou multiplication lorsque les nombres en jeu ne nécessitent pas la mise en œuvre d'un algorithme opératoire.	Dès le **début de l'année**, les élèves résolvent des problèmes additifs et multiplicatifs portant sur des nombres plus grands, ou des problèmes relevant de plusieurs opérations, nécessitant par exemple l'exploration d'un tableau ou d'un graphique. Tout au long de l'année, en appui sur les compétences en calcul qui augmentent progressivement, les élèves consolident l'étude du sens de la division par la résolution de deux types de problèmes abordés au CE1 : le partage et le groupement. Le réinvestissement dans de nombreux problèmes arithmétiques élémentaires permet ensuite aux élèves d'accéder à différentes compréhensions de chaque opération et les liens entre elles.

En CP

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

Les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 100

Ce que sait faire l'élève

- Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes.
- Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
- Il connaît le sens des signes - et +.

Les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 30

Ce que sait faire l'élève

- Il résout, en mobilisant ses connaissances du champ additif sur des petits nombres ou en s'aidant de manipulations, des problèmes du champ multiplicatif en une étape (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable). Les écritures mathématiques avec les symboles : et x ne sont pas attendues.

En CE1

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

Les nombres sont inférieurs à 1 000

Ce que sait faire l'élève

- Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes.
- Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
- Il connaît le sens des signes - et +.
- Il résout des problèmes du champ multiplicatif (itération d'addition).
- Il connaît le sens du signe ×
- Il résout des problèmes multiplicatifs qui mettent en jeu un produit.
- Il résout des problèmes à deux étapes mixant additions, soustractions et/ou multiplications.
- Il résout des problèmes de partage (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs).

En CE2

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

Les nombres sont inférieurs à 10 000

Ce que sait faire l'élève

- Il résout des problèmes du champ additif et/ou multiplicatif en une, deux ou trois étapes.
- Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
- Il connaît le sens des signes −, +, x et :.
- Il résout des problèmes de partage et de groupement (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs).
- Il résout des problèmes nécessitant l'exploration d'un tableau ou d'un graphique.

En CP

Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix

Ce que sait faire l'élève

- Il résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des durées ou des prix.
- Il utilise le lexique spécifique associé aux prix :
  – plus cher, moins cher ;
  – rendre la monnaie ;
  – billet, pièce, somme, reste ;
  – euros.

En CE1 et en CE2

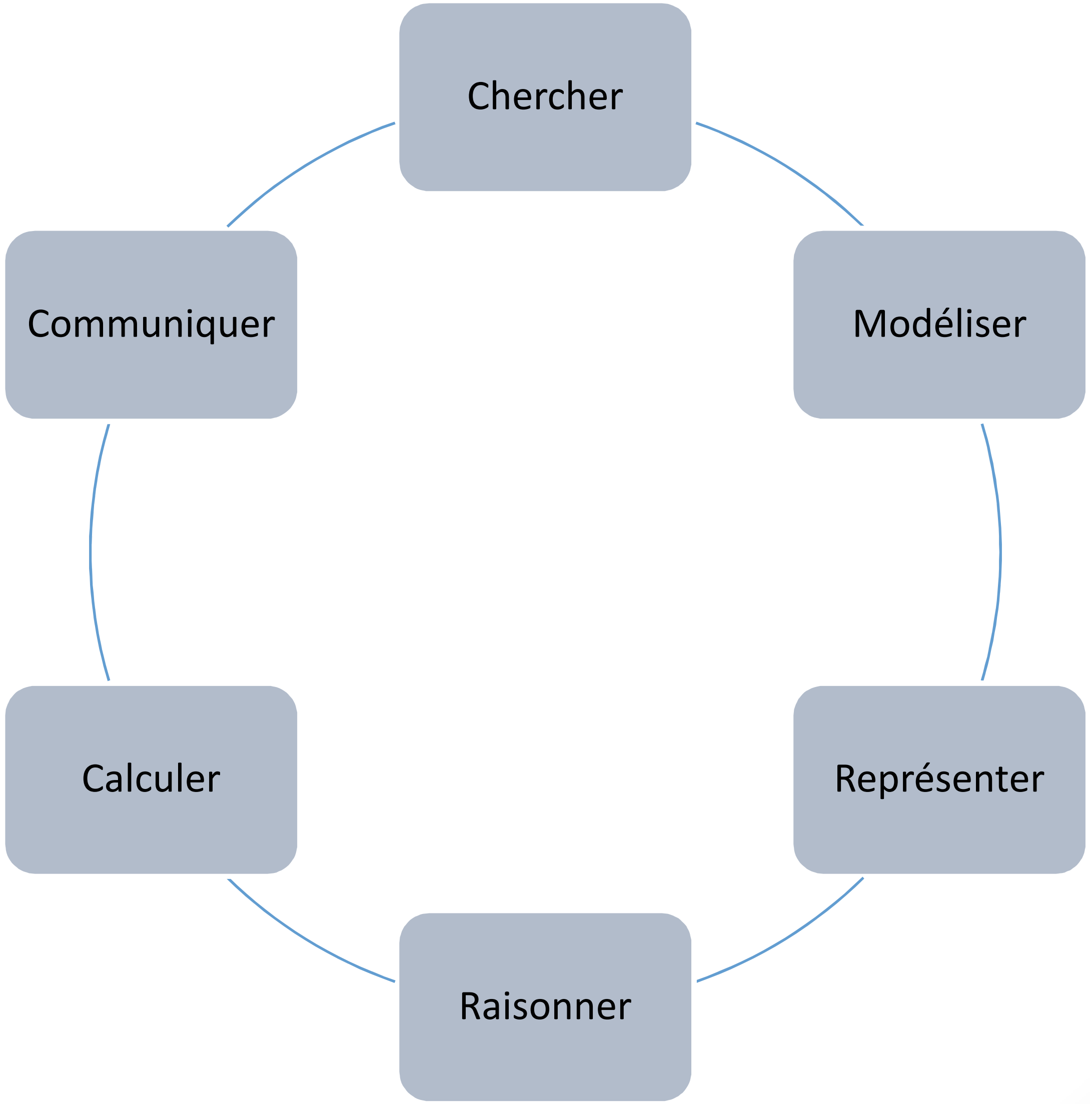
Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix

Ce que sait faire l'élève

Les opérations sur les grandeurs sont menées en lien avec l'avancée des opérations sur les nombres, de la connaissance des unités et des relations entre elles

- Il résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées ou des prix :
  – problèmes impliquant des manipulations de monnaie ;
  – problèmes du champ additif ;
  – problèmes multiplicatifs (addition réitérée) ;
  – problèmes de durées ;
  – problèmes de partage.
- Il mobilise le lexique suivant : le double, la moitié.
- Il utilise le lexique spécifique associé aux prix :
  – plus cher, moins cher ;
  – rendre la monnaie ;
  – billet, pièce, somme ;
  – euros, centimes d'euro.
- Il connaît la relation entre centime d'euro et euro.

6 compétences



Compétences travaillées C2

Chercher

- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.
- Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur.

Modéliser

- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures.
- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.

Représenter

- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).
- Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.

Raisonner

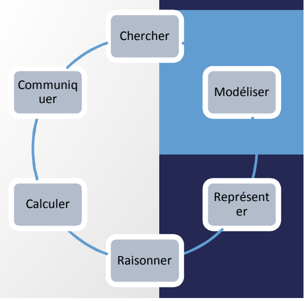
- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.
- Tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier son jugement.
- Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.

Calculer

- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.

Communiquer

- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.



Cibler les compétences

- Introduire des **représentations**, sous forme de schémas adaptés pour permettre la modélisation des problèmes proposés.
- Développer les ***deux compétences*** fondamentales de la résolution de problèmes :
  - ***Modéliser*** : accompagner l'élève à la construction du lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève.
  - ***Calculer*** : renforcer la connaissance de faits numériques et la maîtrise des algorithmes de calcul utilisés.

L'enseignement de la résolution de problème : un enseignement explicite et structuré

- En amont, concevoir une **progressivité** (ne pas se limiter à celle des manuels)
- Construire des **références** avec les élèves et les notifier pour garder des traces, s'y référer.
- Formaliser des **exemples-types**.
- Des séances d'enseignement (temps long) et des séances d'automatisation.

La mise en œuvre en classe

- La priorité doit être donnée aux temps pendant lesquels les élèves résolvent eux-mêmes les problèmes.
- Le travail en groupe n'est pas exclu mais un **travail individuel** d'appropriation doit être prévu en amont.

- La **remédiation** est fondamentale pour s'assurer de la compréhension de l'énoncé, sa représentation, sa modélisation.

- Lors d'une phase de travail individuel, l'enseignant veille à **répartir ses interventions** de façon à répondre aux besoins des élèves les plus fragiles en évitant la sur-sollicitation par des élèves ayant moins de besoin mais plus d'appétence aux mathématiques.

- Lors d'une séance de mathématiques, tous les problèmes traités n'ont pas nécessairement besoin de faire l'objet d'une mise en commun.

- La présentation, à la classe, de propositions de résolutions peut être facilité par **l'outil numérique,** la comparaison s'en trouve facilitée.

Les enjeux de cet enseignement :

Définition et vigilances

Définition selon Jean BRUN

Un problème se caractérise par:

1 - Une situation initiale et un but à atteindre.

2 - Une suite d’actions ou d’opérations nécessaire pour atteindre ce but.

3 - Un rapport sujet/situation: la solution n’est pas disponible d’emblée mais possible à construire.

Enseigner de la méthodologie

Une vigilance face aux propositions de méthodologie

- Les tâches préliminaires à la résolution du problème comme ***souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, trouver la question***… étaient proposées aux élèves avec, comme objectif affiché, d'aider ceux-ci à réussir LES problèmes.

- Plusieurs raisons de contester la finalité affichée de telles tâches sont avancées :
  - Prélever les informations utiles (et délaisser les inutiles) se fait **simultanément** au cours du traitement du problème, cela ne peut pas se faire en amont en particulier si le problème résiste au sujet (c'est confirmé par les travaux de psychologie cognitive).
  - D'autre part, les informations utiles à la résolution sont souvent constituées de **tout le texte du problème**. Les données ne se limitent pas toujours aux données numériques.

Que savons-nous du :

« Comment réussit-on à résoudre un problème ? »

Apports didactiques :

Psychologie cognitive

Et incidences sur l'enseignement

Dans ces quatre énoncés, il s’agit de chercher le nombre de tulipes dans un massif.

a) un massif de fleurs formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires

b) un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes

c) Un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles

d) 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques

Essayez de vous remémorer comment vous procédez ?

Les massifs de fleurs

- Ces quatre énoncés :

✓ s’appuient sur le même contexte
✓ présentent la même structure syntaxique
✓ posent la même question
✓ mettent en jeu les mêmes nombres

MAIS ils relèvent d’opérations arithmétiques différentes.

➢ **Comment faisons-nous, experts, pour discriminer ces quatre problèmes et leur associer une opération directe adaptée ?**

Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les mets dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier.

Combien de kg de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier?

Combien de kg lui reste-t-il ?

Les châtaignes de Charles

- Dans cet énoncé :

✓ la situation est simple

✓ le lecteur maîtrise tous les raisonnements nécessaires (plusieurs techniques possibles)

MAIS la réponse est moins rapidement trouvée que celle des massifs de fleurs

= « Problème atypique » au cycle 3

Une représentation cognitive

- **De manière générale :**

« Comprendre quelque chose serait […] construire une représentation de cette chose. » J. JULO

- **Comprendre un problème = la représentation d'un problème**

Ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé.

Parce qu'il y a **un enjeu** spécifique de la résolution de problème :

« C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps. »

= la représentation d'un problème est *« une construction **dynamique**, transitoire, déterminée à la fois par les propriétés de la situation et **les connaissances** disponibles en mémoire.».* E. CLEMENT

Les schémas de problèmes

Dans la résolution de problèmes, des connaissances interviennent.

Ces connaissances :

« sont liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos »

J. JULO

= « schémas de problèmes »

« Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes ***qui s'organisent progressivement*** *en schémas de problèmes. »*

Deux processus cognitifs en jeu

- **Processus représentationnels**

Le sujet **construit une représentation** cognitive (mentale) du problème.

Le problème **peut lui évoquer** un autre problème autre, **déjà résolu.**

- **Processus opératoires**

Le sujet **déclenche un traitement** :

- ce traitement **peut être inféré de sa mémoire s'il a reconnu** d'une certaine façon le problème (les massifs de fleurs)
- s'il ne reconnait pas le problème, il lui faut **construire une nouvelle stratégie** (les châtaignes de Charles)

Ces processus sont **simultanés**, **ils interagissent**.

C'est l'interaction de ces processus qui font réussir la résolution.

Conséquences sur l'enseignement

Catherine HOUDEMENT

- ENRICHIR LA MÉMOIRE DES ELEVES SUR LES PROBLEMES

- ✓ Donner aux élèves de **nombreuses occasions** de résoudre des problèmes (environ 15 / semaine)
- ✓ Permettre à chaque élève de **réussir SEUL**
- ✓ Permettre à chaque élève de rencontrer des problèmes qu'il **mène à terme**

Définir des types de problèmes dont on attend qu'ils soient **résolus « automatiquement »** par les élèves.

Mais quels problèmes ?

Vers une typologie des problèmes arithmétiques

Catherine HOUDEMENT

Les problèmes « basiques »

- Pour enrichir la mémoire des problèmes :

✓ Qui constituent **des éléments « simples » du raisonnement**

✓ Dont on vise la **résolution quasi immédiate**

Des problèmes liés **à une opération** :

2 données, trouver la troisième

✓ sans information superflue

✓ avec une syntaxe simple

✓ un contexte facile à comprendre (a priori)

= Les *« one step problems »*

=> Objet d'étude de VERGNAUD

Une typologie des problèmes

- Les problèmes « basiques »
- Les problèmes complexes
- Les problèmes atypiques

Apports didactiques :

Observations de terrain

Entretiens individuels de type explicitation

Et incidences sur l'enseignement

Catherine HOUDEMENT

LA QUESTION

Quelles « idées », dans le temps court de la résolution d'un problème numérique, sont susceptibles de provoquer une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ?

LA METHODOLOGIE

Entretiens individuels de type explicitation (VERMERSH)

+ accès brouillon

Après résolution individuelle de **problèmes de réinvestissement**

DES RESULTATS

Pour les problèmes « basiques » :

- ✓ inférences et contrôles

Pour les problèmes « complexes » :

- ✓ Construire de sous problèmes basiques calculables
- ✓ Qualifier les résultats (notamment intermédiaires)

Pour les problèmes basiques : l'inférence

CH et comment t'as fait pour savoir que c'était comme ça qu'il fallait faire
Elève de CE2 : Bah, quand j'ai la question je sais moins / plus / fois

- **Inférence sémantique :**

Certains élèves infèrent directement du contexte l'opération comme le traduisent leurs verbalisations à la question, montrant alors le rôle de leur mémoire des problèmes.

Les autres élèves :

Ils vont tester des opérations (sur un même champ conceptuel ou non)

= recherche d'une modélisation

L'inférence est l'opération qui est la base du raisonnement.

Pour les problèmes basiques : stratégies de contrôle

- **Contrôle pragmatique :**

calcul contrôlé par comparaison avec sa connaissance de la réalité évoquée, puis accepté ou rejeté ou re-questionné.

Second extrait :

CH : *Alors qu'est ce que c'est 12 ?*
Deborah : *le poids d'une table*
CH : *Es-tu sure de ça ?*
Deborah : *Non ça m'étonnerait.*
CH : *Pourquoi ça t'étonnerait ?*
Deborah : *Bah c'est beaucoup / c'est pas assez je veux dire.*

Deb sait qualifier le résultat

Pour les problèmes basiques : stratégies de contrôle

- **Contrôle sémantique :**

Interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème qui déclenche des associations du type « ajouter c'est additionner » « fois c'est multiplier »

CH : POURQUOI tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.

Pour les problèmes basiques : stratégies de contrôle

- **Contrôle syntaxique :**

Conversion en écriture à trou (pré-algébrique) ; voire transformation en écriture algébrique « directe »

Exemple :

Modélisation d'un problème par la phrase :

« Il faut faire 573 plus quelque chose égale 1260 »

Ecriture de 573 + ? = 1260

ET

- recherche par approximation
- OU conversion en 1260 – 573 et calcul

= peut aussi être **une inférence** si elle déclenche la résolution de problème

Conséquences sur l'enseignement

Catherine HOUDEMENT

- prendre conscience DES STRATEGIES DES ELEVES SUR LES PROBLEMES BASIQUES dans les problèmes de réinvestissement :

✓ **Faire des inférences** (d'où l'importance de la mémoire des problèmes)

✓ **Tester les opérations** (toutes ou celles du champs conceptuel inféré)

= Les inférences sont des constructions mentales personnelles à partir du problème qui font avancer

✓ **Mettre en œuvre des contrôles pragmatiques et sémantiques**

= mais un contrôle pragmatique ou sémantique n'est pas une certitude de bonne réponse : c'est une construction mentale qui fait partie du raisonnement

➡ **LES INFERENCES SYNTAXIQUES sont à enseigner spécifiquement**

Sur les problèmes complexes

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Un problème complexe : qui est un composé de problèmes basiques « cachés » , à construire par l'élève

Sous problèmes calculables	Sous problèmes utiles
Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance de l'après midi : prix que payent les adultes Deux séances : prix que payent les adultes	Recette de la séance du soir OU Recette venant des adultes ET Séance du soir : prix que payent les enfants

La qualification du résultat

CH : *Alors là quand tu / est ce que… / quand tu calcules cela / qu'est ce que tu calcules / ça correspond à quoi le nombre 90 que tu cherches ?*
Nicolas :(silence)
CH : *Le nombre 90 que tu as trouvé là / si tu pouvais me donner une petite phrase qui va avec ce nombre là.*
Nicolas : (silence)
CH : *Tu vois pas / donc quand tu as fait le calcul tu avais envie de faire ce calcul-là mais tu vois pas à quoi correspond 90 ?*
Nicolas : *Non*

CH : *Et ce calcul là* (en montrant sur la feuille 20 x 4) */ est ce que tu vois à quoi il correspond ?*
Nicolas : *à 4 fois 20*
CH : *Mais par rapport au problème, qu'est-ce que tu as calculé par rapport au problème ?*
Nicolas : *bah 4 € et 20 enfants*
CH : *Et finalement quand tu fais 4 € et 20 enfants qu'est ce que tu obtiens à la fin ?*
Nicolas : *80 €*

- Qualification faible : le fait de préciser l'unité de mesure
- Qualification : le fait d'expliciter le rôle que joue la grandeur dans le problème

Conséquences sur l'enseignement

Catherine HOUDEMENT

- RESOUDRE DES PROBLEMES COMPLEXES nécessite de :

✓ **Connecter** des informations pour **construire des sous-problèmes calculables**

✓ Savoir résoudre ces problèmes basiques

✓ **MAIS AUSSI qualifier les résultats intermédiaires** :

- Les donner en grandeur *(80 euros, 72 enfants)*
- Les replacer dans le contexte du problème *(72 euros, prix qu'ont payé les adultes à la séance)*

Retour sur la typologie

- **Les problèmes « basiques » / « élémentaires »**

Enjeu pour l'élève : les mémoriser

- **Les problèmes complexes**

Enjeu pour l'élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et en qualifiant les résultats

- **Les problèmes atypiques**

Enjeu pour l'élève : inventivité stratégique et flexibilité de raisonnement, persévérance et confiance en soi

Temps 2 : Travail collectif

1 - Construire la mémoire des problèmes ?

Présentez sur quelques diapositives des photos d'affichages collectifs et/ou de traces écrites des élèves.

= Restitution lors du temps 3

2 - A partir du document de travail de votre niveau *« attendus de fin de CP/CE1/CE2 : des exemples de réussites »*, analyser le manuel utilisé pour votre niveau :

- ❑ Tous les types de problèmes sont-ils présents ? Quels sont les manques ? Les ajouts ? Les contextes numériques sont-ils semblables ?

A partir du tableau de progression cycle 2, comparer la programmation proposée par les manuels/fichiers utilisés :

- ❑ Sur votre niveau
- ❑ Sur le cycle dans votre école